ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

ĐỀ THI TUYỂN SINH LỚP 10
HỆ THPT CHUYÊN NĂM 2012

MÔN THI: TOÁN (cho tất cả các thí sinh)

Thời gian làm bài: 120 phút (Không kể thời gian phát đề)

Câu I. 1) Giải phương trình:

$$\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 2x+y+xy=4 \end{cases}$$

Giải:

a) ĐK : x ≥ -6

$$\sqrt{x+9}+2012\sqrt{x+6}=2012+\sqrt{(x+9)(x+6)}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+9}(1-\sqrt{x+6})+2012(\sqrt{(x+6)}-1)=0$$

$$\Leftrightarrow (-\sqrt{x+9}+2012)(\sqrt{(x+6)}-1)=0$$

Vậy PT có hai nghiệm x1 = -5 ; x2 = 4048135

b) $\begin{cases} x^2+y^2+2y=4(1) \\ 2x+y+xy=4(2) \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2+2y=4 \\ 4x+2y+2xy=8 \end{cases}$$

Cộng vế với vế của hai PT được:

$$x^2+y^2+4x+4y+2xy-12=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^2-4+4(x+y-2)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+y-2)(x+y+6)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+y=2(*) \\ x+y=-6(**) \end{array}\right.$$

Từ (*) có $x = 2 - y$ thay vào PT (2) và giải PT được $y_1 = 0; y_2 = 1$ từ đó tìm được $x_1 = 2; x_2 = 1$.

Từ (**) có $x = -y - 6$ thay vào PT (2) được PT vô nghệm.

Vậy HPT đã cho có hai nghiệm $(x; y) = (1;1); (2;0)$

Câu II. 1) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn đẳng thức:

$$(x + y + 1)(xy + x + y) = 5 + 2(x + y)$$

2) Giả sử x, y là các số thực dương thỏa mãn điều kiện $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1) \geq 4$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức :

$$P = \frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x}$$

Giải:

1) $(x + y + 1)(xy + x + y) = 5 + 2(x + y)$

⇔ $(x + y + 1)(xy + x + y) = 2(x + y + 1) + 3$ ⇔ $(x + y + 1)(xy + x + y - 2) = 3$

⇔ **(I)** $\begin{cases} x + y + 1 = -3 \\ x + y + xy - 2 = -1 \end{cases}$ **hoặc (II)** $\begin{cases} x + y + 1 = -1 \\ x + y + xy - 2 = -3 \end{cases}$

Hoặc (III) $\begin{cases} x + y + 1 = 1 \\ x + y + xy - 2 = 3 \end{cases}$ **hoặc (IV)** $\begin{cases} x + y + 1 = 3 \\ x + y + xy - 2 = 1 \end{cases}$

Giải các hệ pt trên ta thấy hệ (II) có nghiệm (x;y) =(-1;-1)

các hpt I; III; IV không thỏa mãn (x;y) nguyên.

Vậy có duy nhất cặp số (x;y) =(-1;-1) thỏa mãn đề bài.

2) Ta có: $(\sqrt{x} + 1)(\sqrt{y} + 1) = \sqrt{xy} + \sqrt{x} + \sqrt{y} + 1 \geq 3\sqrt[3]{\sqrt{xy}\sqrt{x}\sqrt{y}} + 1 = 3\sqrt[3]{xy} + 1$

⇔ $3\sqrt[3]{xy} + 1 \geq 4 \Leftrightarrow \sqrt[3]{xy} \geq 1 \Rightarrow \sqrt{xy} \geq 1$

P=$\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{x} \geq 2\sqrt{\frac{x^2y^2}{xy}} = 2\sqrt{xy} \geq 2$

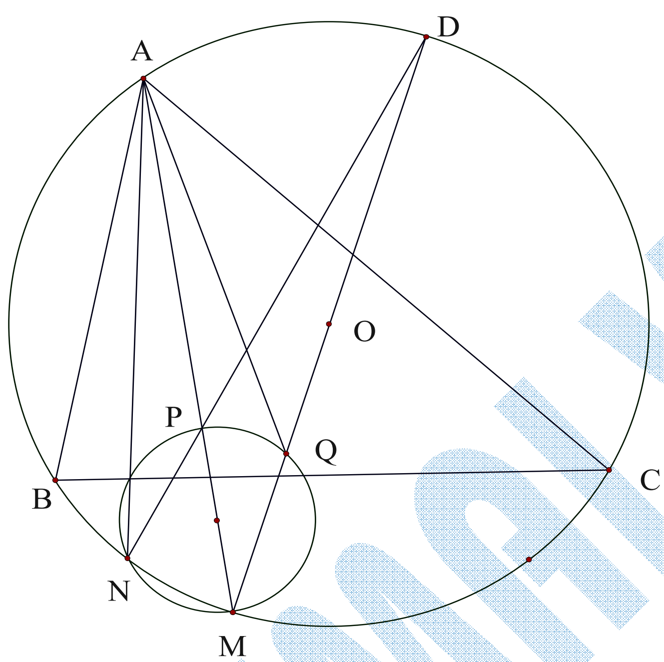
Vậy GTNN của P=2 ⇔ x = y = 1

Câu III. Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi M là một điểm trên cung nhỏ BC (M khác B, C và AM không đi qua O). Giả sử P là một điểm thuộc đoạn thẳng AM sao cho đường tròn đường kính MP cắt cung nhỏ BC tại điểm N khác M.

1) Gọi D là điểm đối xứng với điểm M qua O. Chứng minh rằng ba điểm N, P, D thẳng hàng.

2) Đường tròn đường kính MP cắt MD tại Q khác M. Chứng minh rằng P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Giải:



a) Có $\widehat{DNM} = \widehat{PNM} = 90^0$ => D; P; N thẳng hàng (đpcm)

b) Có tứ giác MNPQ nội tiếp => $\widehat{NPM} = \widehat{NQM}$

Tứ giác MNAD nội tiếp =>NAM=NDM

Mà $\widehat{NPM} = \widehat{NAM} + \widehat{PNA}$

$\widehat{NQM} = \widehat{NDM} + \widehat{QND}$

$\Rightarrow \widehat{PNA} = \widehat{QND}$ $\Rightarrow$ NP là phân giác $\widehat{QNA}$ (1)

Có $\widehat{PAD} = \widehat{PQD} = 90^0$ $\Rightarrow$ Tứ giác PQDA nội tiếp

$\Rightarrow \widehat{QAP} = \widehat{PQD}$

Mà $\widehat{QPD} = \widehat{MAN}$ (cùng chắn cung MN của (O))

$\Rightarrow \widehat{ANP} = \widehat{PAQ}$ $\Rightarrow$ PA là phân giác $\widehat{QAN}$ (2)

Từ (1);(2) => P là tâm đường tròn nội tiếp tam giác AQN.

Câu IV. Giả sử a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a \le b \le 3 \le c; c \ge b+1; a+b \ge c$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$Q = \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)}$$

Giải:

Không mất tính tổng quát ta có thể đặt:

$$\begin{cases} a = 1+\beta > 0 \\ b = 2+\beta > 0 \\ c = 3+\beta > 0 \end{cases} \Rightarrow Q = \frac{2ab+a+b+c(ab-1)}{(a+1)(b+1)(c+1)} = \frac{\beta^3+8\beta^2+18\beta+10}{\beta^3+9\beta^2+26\beta+24}$$

và kết hợp với điều kiện đầu bài $a \le b \le 3 \le c; c \ge b+1; a+b \ge c \Rightarrow 0 \le \beta \le 1$.

Do đó ta có bài toán mới sau:

Cho $0 \le \beta \le 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

Q = $\dfrac{\beta^3+8\beta^2+18\beta+10}{\beta^3+9\beta^2+26\beta+24}$. Thật vậy ta có:

Với mọi $\beta \in [0;1]$ thì $7\beta^2+51\beta+86 > 0$

Mà theo giả thiết có $\beta \ge 0 \Rightarrow \beta(7\beta^2+51\beta+86) \ge 0$

$$\Leftrightarrow 7\beta^3+51\beta^2+86\beta \ge 0 \Leftrightarrow (12\beta^3-5\beta^3)+(96\beta^2-45\beta^2)+(216\beta-130\beta) \ge 0$$

$$\Leftrightarrow 12\beta^3+96\beta^2+216\beta \ge 5\beta^3+45\beta^2+130\beta \Leftrightarrow 12\beta^3+96\beta^2+216\beta+120 \ge 5\beta^3+45\beta^2+130\beta+120$$

$$\Leftrightarrow 12(\beta^3+8\beta^2+18\beta+10) \ge 5(\beta^3+9\beta^2+26\beta+24)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\beta^3+8\beta^2+18\beta+10}{\beta^3+9\beta^2+26\beta+24} \ge \frac{5}{12} \Rightarrow Q \ge \frac{5}{12} \text{ vì } \beta^3+9\beta^2+26\beta+24 > 0$$

với mọi $\beta \in [0;1]$

Vậy giá trị nhỏ nhất của Q là $\dfrac{5}{12}$ khi a = 1 ; b = 2 ; c = 3.

Nguồn: Hocmai.vn