PHẦN 1: ĐẠI SỐ

CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

1. Độ và radian:

$$(180)^0 = \pi\,(rad); \qquad 1^0 = \frac{\pi}{180}\ \text{(rad)};\ 1(rad) = \left(\frac{180}{\pi}\right)^0$$

2. Các hệ thức cơ bản:

$$* \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \quad (\cos\alpha \neq 0); \qquad * \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} \quad (\sin\alpha \neq 0)$$

$$* \ \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \forall\alpha;$$

$$* \ 1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z}\right)$$

$$* \ 1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} \quad (\alpha \neq k\pi\ ,\ k \in \mathbf{Z})$$

$$* \ \tan\alpha.\cot\alpha = 1 \quad \left(\alpha \neq \frac{k\pi}{2}\ ,\ k \in \mathbf{Z}\right).$$

3. Các hệ quả cần nhớ:

$$\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha; \qquad \cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha$$

$$\tan(\alpha + k\pi) = \tan\alpha; \qquad \cot(\alpha + k\pi) = \cot\alpha$$

$\tan\alpha$ xác định khi $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$

$\cot\alpha$ xác định khi $\alpha \neq k\pi, k \in Z$

$$-1 \leq \sin\alpha \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$$

$$* \ \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x$$

$$* \ \sin^6 x + \cos^6 x = 1 - \frac{3}{4}\sin^2 2x$$

Dấu các giá trị lượng giác:

Góc phần tư / GTLG	I	II	III	IV
$\sin\alpha$	+	+	–	–
$\cos\alpha$	+	–	–	+
$\tan\alpha$	+	–	+	–
$\cot\alpha$	+	–	+	–

4. Các cung liên kết:

***a. Cung đối**: α và $-\alpha$*

$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha; \qquad \sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha; \qquad \cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$

***b. Cung bù**: α và $\pi-\alpha$*

$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha; \qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha; \qquad \cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

***c. Cung phụ**: α và $\frac{\pi}{2}-\alpha$*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cot\alpha; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\tan\alpha$$

*d. **Cung hơn kém nhau** π : α và $\pi+\alpha$*

$$\tan(\pi+\alpha)=\tan\alpha; \qquad \cot(\pi+\alpha)=\cot\alpha$$
$$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha; \qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$$

***e. Cung hơn kém nhau** $\frac{\pi}{2}$: α và $\frac{\pi}{2}+\alpha$*

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\alpha; \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\cot\alpha; \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\tan\alpha$$

5. Các công thức biến đổi:

a. Công thức cộng:

- $\sin(a \pm b) = \sin a \cos b \pm \cos a \sin b$
- $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \sin a \sin b$
- $\tan(a \pm b) = \dfrac{\tan a \pm \tan b}{1 \mp \tan a \tan b}$
- $\cot(a \pm b) = \dfrac{1 \mp \tan a \tan b}{\tan a \pm \tan b}$

b. Công thức nhân đôi:

- $\sin 2a = 2 \sin a.\cos a$
- $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$
- $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$; $\cot 2a = \dfrac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$

*** Công thức tính theo** $t = \tan\dfrac{x}{2}$

$$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

c. Công thức hạ bậc:

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}; \quad \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}; \quad \tan^2 a = \frac{1-\cos 2a}{1+\cos 2a}$$

Lưu ý:

* $1+\cos x = 2\cos^2\dfrac{x}{2}$

* $1-\cos x = 2\sin^2\dfrac{x}{2}$

d. Công thức biến đổi tích về tổng:

$$\text{sina.cosb} = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$$

$$\text{cosa.cosb} = \frac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$$

$$\text{sina.sinb} = -\frac{1}{2}[\cos(a+b) - \cos(a-b)]$$

e. Công thức biến đổi tổng về tích:

- $\sin A + \sin B = 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
- $\cos A + \cos B = 2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}$
- $\cos A - \cos B = -2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$
- $\tan\alpha \pm \tan\beta = \dfrac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha.\cos\beta}\quad \left(\alpha;\beta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ ,\ \ k \in \mathbf{Z}\right)$

Chú ý:

* $\sin x + \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

* $\sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

f. Giá trị lượng giác của các cung đặc biệt:

Góc	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	120^0	135^0	150^0	180^0
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	**1**	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\|\|$	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
cot	$\|\|$	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	$\|\|$

HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Các hàm số lượng giác:

$y=\sin x$	$y=\cos x$
- TXĐ: D= $\mathbb{R}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kì 2π - Tập giá trị: $T=\left[-1;1\right]$ - Hàm số đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$ - Hàm số nghịch biến trong $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;\frac{3\pi}{2}+k2\pi\right)$	- TXĐ: D= $\mathbb{R}$ - Là hàm số chẳn - Hàm tuần hoàn với chu kì 2π - Tập giá trị: $T=\left[-1;1\right]$ - Hàm số đồng biến trong $\left(-\pi+k2\pi;k2\pi\right)$ - Hàm số nghịch biến trong $\left(k2\pi;\pi+k2\pi\right)$

$y = \tan x$	$y = \cot x$
- TXĐ: D= $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kì π - Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ - Hàm số đồng biến trong $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ - Có các đường tiệm cận $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$	- TXĐ: D= $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \right\}$ - Là hàm số lẻ - Hàm tuần hoàn với chu kì π - Tập giá trị: $T = \mathbb{R}$ - Hàm số nghịch biến trong $(k\pi; \pi + k\pi)$ - Có các đường tiệm cận $x = k\pi$

2. Tập xác định của hàm số:

a) $y = \frac{P(x)}{Q(x)}$ xác định khi $Q(x) \neq 0$

b) $y = \sqrt{P(x)}$ xác định khi $P(x) \geq 0$

c) $y = \frac{P(x)}{\sqrt{Q(x)}}$ xác định khi $Q(x) > 0$

d) $y = \sin f(x); y = \cos f(x)$ xác định khi $f(x)$ xác định.

e) $y = \tan f(x)$ xác định khi $f(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

f) $y = \cot f(x)$ xác định khi $f(x) \neq k\pi$

3. Tìm giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số:

a) Áp dụng các tính chất của bất đẳng thức, và với mọi x ta có:

$-1 \leq \sin x \leq 1;\ -1 \leq \cos x \leq 1;\ 0 \leq \sin^2 x \leq 1;\ 0 \leq \cos^2 x \leq 1$

b) Giá trị nhỏ nhất, giá trị lớn nhất của hàm số $y = a\sin x + b\cos x + c$

$\forall x \in \mathbb{R}$ ta có $-\sqrt{a^2 + b^2} \leq ainx + b\cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow c - \sqrt{a^2 + b^2} \leq a\sin x + b\cos x + c \leq c + \sqrt{a^2 + b^2}$$

4. Xét tính chẵn, lẻ của hàm số:

Cho hàm số y = f(x) xác định trên D.

* Hàm số y = f(x) được gọi là hàm số chẵn nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$

* Hàm số y = f(x) được gọi là hàm số lẻ nếu $\begin{cases} \forall x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

1. Phương trình lượng giác cơ bản:

a) Phương trình $\sin x = m$

* Điều kiện có nghiệm: $|m| \le 1$

* Tìm góc a sao cho $\sin a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \sin^{-1} m$). Ta được: $\sin x = \sin a$ và áp dụng công thức:

$$\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{array} \right.$$

Hay $\left[\begin{array}{l} u = v + k360^0 \\ u = 180^0 - v + k360^0 \end{array} \right.$ nếu trong phương trình có cho độ.

* Trường hợp đặc biệt:

$\circ \sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$

$\circ \sin u = 1 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

$\circ \sin u = -1 \Leftrightarrow u = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

* Nếu không phải là giá trị đặc biệt thì có thể sử dụng công thức:

$$\sin u = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \arcsin m + k2\pi \\ u = \pi - \arcsin m + k2\pi \end{array} \right. \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2} \right)$$

* $-\sin u = \sin(-u)$; $\cos u = \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$; $-\cos u = \sin\left(u - \dfrac{\pi}{2}\right)$

b) Phương trình $\cos x = m$

* Điều kiện có nghiệm: $|m| \le 1$

* Tìm góc a sao cho $\cos a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \cos^{-1} m$). Ta được: $\cos x = \cos a$ và áp dụng công thức:

$$\cos u = \cos v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = -v + k2\pi \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Hay $\left[\begin{array}{l} u = v + k360^0 \\ u = -v + k360^0 \end{array}\right.$ nếu trong phương trình có cho độ.

* Trường hợp đặc biệt:

$$\begin{array}{|l} \circ \cos u = 0 \Leftrightarrow u = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \circ \cos u = 1 \Leftrightarrow u = k2\pi \\ \circ \cos u = -1 \Leftrightarrow u = \pi + k2\pi \end{array}$$

* Nếu không phải là giá trị đặc biệt thì có thể sử dụng công thức:

$$\cos u = m \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \arccos m + k2\pi \\ u = -\arccos m + k2\pi \end{array}\right. \quad \left(-\frac{\pi}{2} \le \arcsin m \le \frac{\pi}{2}\right)$$

* $-\cos u = \cos(\pi - u)$; $\sin u = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$; $-\sin u = \cos\left(u + \dfrac{\pi}{2}\right)$

c) Phương trình $\tan x = m \quad \left(x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi\right)$

* Tìm góc a sao cho $\tan a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \tan^{-1} m$)

Ta được: $\tan x = \tan a$ và áp dụng công thức

$$\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Hay $u = v + k180^0$ nếu trong phương trình có độ.

* Đặc biệt:

$$\begin{array}{|l} \circ \tan u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi \\ \circ \tan u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm \dfrac{\pi}{4} + k\pi \end{array}$$

* Nếu m không phải là giá trị đặc biệt có thể sử dụng công thức:

$$\tan u = m \Leftrightarrow u = \arctan m + k\pi \quad \left(-\frac{\pi}{2} < \arctan m < \frac{\pi}{2}\right)$$

* $-\tan u = \tan(-u)$; $\cot u = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - u\right)$; $-\cot u = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} + u\right)$

d) Phương trình $\cot x = m \quad (x \neq k\pi)$

* Tìm góc a sao cho $\cot a = m$ (sử dụng MTCT: $a = \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{m}\right)$)

Ta được: $\cot x = \cot a$ và áp dụng công thức

$$\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$$

Hay $u = v + k180^0$ nếu trong phương trình có độ.

* Đặc biệt:

$$\circ \cot u = 0 \Leftrightarrow u = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\circ \tan u = \pm 1 \Leftrightarrow u = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi$$

* Nếu m không phải là giá trị đặc biệt có thể sử dụng công thức:

$$\cot u = m \Leftrightarrow u = \operatorname{arccot} m + k\pi \qquad \left(0 < \operatorname{arccot} m < \pi\right)$$

* $-\cot u = \cot\left(-u\right)$; $\tan u = \cot\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$; $-\tan u = \cot\left(\frac{\pi}{2} + u\right)$

2. Phương trình bậc hai đối với một hàm số lượng giác:

Dạng	***Đặt***	***Điều kiện***
$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$	t = sinx	$-1 \le t \le 1$
$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$	t = cosx	$-1 \le t \le 1$
$a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$	t = tanx	$x \ne \frac{\pi}{2} + k\pi \ (k \in Z)$
$a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$	t = cotx	$x \ne k\pi \ (k \in Z)$

Giải lấy nghiệm t thích hợp sau đó áp dụng phương trình cơ bản.

Chú ý:

$$\circ \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\circ \sin^2 x = 1 - \cos^2 x$$

$$\circ \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

3. Phương trình bậc nhất đối với sin*x* và cos*x*:

a) Dạng phương trình: $a\sin x + b\cos x = c$

b) Điều kiện có nghiệm: $a^2 + b^2 \ge c^2$

c) Phương pháp giải:

Chia hai vế của phương trình cho $\sqrt{a^2 + b^2}$

Ta được phương trình: $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

Đặt $\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Ta được phương trình:

$$\sin x\cos\alpha + \sin\alpha\cos x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Leftrightarrow \sin\left(x+\alpha\right) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad (*)$$

(*) là phương trình dạng cơ bản.

4. Phương trình đẳng cấp bậc hai đối với sin*x* và cos*x*

a) Dạng: $a.sin^2 x + b.sinx.cosx + c.cos^2 x = d \quad \left(1\right)$

b) Phương pháp giải:

* Kiểm tra cosx = 0 có thoả mãn hay không?

Lưu ý: cosx = 0 $\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \sin^2 x = 1 \Leftrightarrow \sin x = \pm 1.$

* Khi $\cos x \neq 0$, chia hai vế phương trình (1) cho $\cos^2 x \neq 0$ ta được:

$$a.\tan^2 x + b.\tan x + c = d(1+\tan^2 x)$$

* Đặt: t = tanx, đưa về phương trình bậc hai theo t:

$$(a-d)t^2 + b.t + c - d = 0$$

5. Phương trình đối xứng, phản đối xứng:

a) Dạng: $a.(sinx \pm cosx) + b.sinx.cosx + c = 0$

b) Phương pháp giải:

* Đặt: $t = \cos x \pm \sin x = \sqrt{2}.\cos\left(x \mp \frac{\pi}{4}\right); \ |t| \leq \sqrt{2}.$

$$\Rightarrow t^2 = 1 \pm 2\sin x.\cos x \Rightarrow \sin x.\cos x = \pm\frac{1}{2}(t^2-1).$$

* Thay vào phương trình đã cho, ta được phương trình bậc hai theo t. Giải phương trình này tìm t thỏa $|t| \leq \sqrt{2}$. Suy ra x.

Chú ý:

* $\cos x + \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

* $\cos x - \sin x = \sqrt{2}\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$

6. Phương trình lượng giác khác:

Để giải một phương trình lượng giác chưa phải là các dạng quen thuộc ta cần sử dụng các phép biến đổi lượng giác để đưa phương trình về dạng quen thuộc, có thể phân tích phương trình đã cho về dạng phương trình tích hoặc áp dụng tính chất bất đẳng thức để đưa về hệ phương trình để giải.

Các phương pháp giải phương trình lượng giác thường sử dụng:

* Biến đổi phương trình đã cho về một trong các dạng phương trình cơ bản đã biết (đưa về cùng một cung hoặc cùng một hàm số lượng giác,...).

* Biến đổi phương trình đã cho về dạng tích: $A.B = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = 0 \\ B = 0 \end{array}\right.$

* Biến đổi phương trình về dạng có thể đặt ẩn số phụ (đối xứng, đặt $t = \tan\frac{x}{2}, \ldots$)

ĐẠI SỐ TỔ HỢP

1. Phép đếm:

a) Qui tắc cộng:

Giả sử để hoàn thành hành động (H) ta có thể thực hiện qua các trường hợp A hoặc B hoặc C ... (mỗi trường hợp đều hoàn thành công việc)

Nếu A có m cách, B có n cách, C có p cách thì có $m+n+p$ ... cách để hoàn thành (H).

b) Qui tắc nhân:

Giả sử để hoàn thành hành động (H) ta phải qua nhiều công đoạn (bước) A, B, C liên tiếp nhau.

Công đoạn A có m cách, công đoạn B có n cách, công đoạn C có p cách... Khi đó để hoàn thành (H) thì có $m.n.p$ ... cách

2. Hoán vị:

a) Hoán vị:

Cho tập A có n phần tử, mỗi cách sắp thứ tự n phần tử của A gọi là một hoán vị.

b) Số các hoán vị n phần tử: $P_n = n!$

Chú ý: Giai thừa

* $n! = n.(n-1)...3.2.1$

* Qui ước: $0! = 1$

3. Chỉnh hợp:

a) Chỉnh hợp:

Cho tập A có n phần tử, mỗi bộ sắp thứ tự gồm k phần tử lấy trong n phần tử của A ($k \in \mathbb{N}, 0 < k \leq n$) gọi là một chỉnh hợp chập k của n.

b) Số các chỉnh hợp chập k của n:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n.(n-1)...(n-k+1)$$

4. Tổ hợp:

a) Tổ hợp:

Cho tập A có n phần tử, mỗi tập hợp con gồm k phần tử của A ($k \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq n$) gọi là một tổ hợp chập k của n.

b) Số các tổ hợp chập k của n: $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

c) Tính chất: $C_n^0 = C_n^n = 1$ $\quad C_n^k = C_n^{n-k}$ $\quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

5. Cách phân biệt tổ hợp và chỉnh hợp:

* Chỉnh hợp có tính đến thứ tự của k phần tử.
* Tổ hợp không tính đến thứ tự của k phần tử.

NHỊ THỨC NEWTON

1. Khai triển nhị thức Newton:

$(a+b)^n = C_n^0 a^b + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + ... + C_n^k a^{n-k} b^k + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$ Số hạng tổng quát thứ k+1 của khai triển: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

2. Tam giác Pascal: (cho biết giá trị của C_n^k)

n \ k	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

Muốn tìm C_n^k ta tìm số ở dòng n, cột k. Ví dụ: $C_6^3 = 20$ (dòng 6, cột 3)

3. Giải phương trình:

Để giải phương trình ta cần đặt điều kiện cho ẩn số và áp dụng công thức hoán vị, tổ hợp, chỉnh hợp đưa về phương trình đại số để giải.

Chú ý chỉ lấy những nghiệm thỏa mãn điều kiện.

XÁC SUẤT

1. Tập hợp Ω tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu.

a) Gieo n con súc sắc thì $|\Omega| = 6^n$

b) Gieo n đồng tiền thì $|\Omega| = 2^n$

c) Lấy k viên bi trong hộp có n viên bi thì $|\Omega| = C_n^k$

d) Hộp 1 có m viên bi, hộp 2 có n viên bi. Lấy k viên ở hộp 1 và h viên ở hộp 2 thì $|\Omega| = C_m^k C_n^h$

2. Một biến cố A liên quan tới phép thử T là $\Omega_A \subset \Omega$. Biến cố A xảy ra khi và chỉ khi kết quả của T thuộc Ω_A. Mỗi phần tử của Ω_A gọi là kết quả thuận lợi cho A.

3. Hai biến cố A, B gọi là xung khắc nếu A, B không đồng thời xảy ra.

4. Hai biến cố A, B gọi là độc lập nếu việc xảy ra hay không xảy ra của biế cố nay không ảnh hưởng đến xác suất xảy ra của biến cố kia.

5. Xác suất của A là $P(A) = \dfrac{|\Omega_A|}{|\Omega|}$

6. $A_1, A_2, ..., A_k$ là các biến cố đôi một xung khắc thì

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k)$$

7. $A_1, A_2, ..., A_k$ là các biến cố độc lập thì

$$P(A_1 A_2 ... A_k) = P(A_1) P(A_2) ... P(A_k)$$

8. $\overline{A}$ là biến cố đối của biến cố A thì: $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

9. X là biến ngẫu nhiên rời rạc với tập giá trị là $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$

a) Kỳ vọng của X là $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i$ với $p_i = P(X = x_i), i = 1, 2, 3, ..., n$

b) Phương sai của X là $V\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\mu\right)^2 p_i$ hay

$V\left(X\right)=\sum_{i=1}^{n}x^2 p_i-\mu^2$ trong đó $p_i=P\left(X=x_i\right), i=1,2,...,n$ và $\mu=E\left(X\right)$

c) Độ lệch chuẩn: $\sigma\left(X\right)=\sqrt{E\left(X\right)}$

DÃY SỐ

1. Tính đơn điệu của dãy số:

a) Định nghĩa: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ nếu $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

* $u_n<u_{n+1}$ thì dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

* $u_n>u_{n+1}$ thì dãy số $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

* Một dãy tăng (hay giảm) gọi là dãy số đơn điệu.

b) Cách xét tính đơn điệu của dãy số:

Để xét tính đơn điệu của một dãy số ta có thể áp dụng tính chất bất đẳng thức để suy trực tiếp. Hoặc xét hiệu $T=u_{n+1}-u_n$

* Nếu $T>0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

* Nếu $T<0,\forall n\in\mathbb{N}^*$ thì $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

Nếu $u_n>0,\forall n\in\mathbb{N}$ ta có thể xét $\frac{u_n}{u_{n+1}}$

* $\frac{u_n}{u_{n+1}}>1$ thì $\left(u_n\right)$ là dãy số giảm.

* $\frac{u_n}{u_{n+1}}<1$ thì $\left(u_n\right)$ là dãy số tăng.

2. Tính bị chặn của dãy số:

a) Định nghĩa: Cho dãy số $\left(u_n\right)$ nếu $\forall n\in\mathbb{N}^*$ ta có:

* $\exists M: u_n\le M$ thì dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn trên.

* $\exists m: u_n\ge m$ thì dãy số $\left(u_n\right)$ bị chặn dưới.

* Dãy số vừa bị chặn trên vừa bị chặn dưới gọi là dãy số bị chặn.

CẤP SỐ CỘNG

1. Định nghĩa:

$\left(u_n\right)$ là một cấp số cộng nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại số d sao cho $u_{n+1} = u_n + d$

d: công sai

u_n: số hạng tổng quát thứ n.

2. Tính chất:

a) Số hạng tổng quát thứ n: $u_n = u_1 + \left(n-1\right)d$

b) $\left(u_n\right)$ là cấp số cộng $\Leftrightarrow u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$, $\forall n > 1$

3. Tổng n số hạng đầu tiên của cấp số cộng:

$$S_n = \frac{n\left(u_1 + u_n\right)}{2} = \frac{n\left[2u_1 + \left(n-1\right)d\right]}{2}$$

CẤP SỐ NHÂN

1. Định nghĩa:

$\left(u_n\right)$ là một cấp số nhân nếu $\forall n \in \mathbb{N}^*$ tồn tại số q sao cho $u_{n+1} = u_n.q$

q: công bội

u_n: số hạng tổng quát thứ n.

2. Tính chất:

a) Số hạng tổng quát: $u_n = u_1.q^{n-1}$

b) $\left(u_n\right)$ là cấp số nhân $\Leftrightarrow u_{n-1}.u_{n+1} = \left[u_n\right]^2$, $\forall n > 1$

3. Tổng n số hạng đầu tiên:

* $q = 1$ thì $S_n = n.u_1$

* $q \neq 1$ thì $S_n = u_1.\dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

* CSN lùi vô hạn là CSN có công bội $\left|q\right| < 1$ có tổng $S = \dfrac{u_1}{1-q}$

GIỚI HẠN CỦA DÃY SỐ

1. Định nghĩa:

a) $\lim u_n = 0 \Leftrightarrow \forall n, |u_n|$ nhỏ hơn một số dương cho trước nhỏ tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

b) $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \lim(u_n - L) = 0$

c) $\lim u_n = +\infty \Leftrightarrow \forall n, u_n$ lớn hơn một số dương cho trước tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

d) $\lim u_n = -\infty \Leftrightarrow \forall n, u_n$ nhỏ hơn một số dương cho trước tùy ý kể từ một số hạng nào đó trở đi.

2. Tính chất:

a) $\lim(u_n \pm v_n) = \lim u_n \pm \lim v_n$

b) $\lim(u_n.v_n) = \lim u_n.\lim v_n$

c) $\lim(k.u_n) = k.\lim u_n$

d) $\lim \dfrac{u_n}{v_n} = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n} \left(\lim v_n \neq 0\right)$

e) $\lim u_n = L \in \mathbb{R} \Rightarrow \lim \sqrt[3]{u_n} = \sqrt[3]{L}; \lim \sqrt{u_n} = \sqrt{L}\ (L \geq 0)$

f) $\left.\begin{array}{l} |u_n| < v_n \\ \lim v_n = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim u_n = 0$

3. Một số giới hạn cơ bản:

a) $\lim \dfrac{1}{n^\alpha} = 0$

b) $\lim n^\alpha = +\infty \left(\alpha \in \mathbb{N}^*\right)$

c) $\lim q^n = \left[\begin{array}{ll} 0, & |q| < 1 \\ +\infty, & q > 1 \end{array}\right.$

e) $\lim \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$

4. Cách tìm giới hạn:

a) Đặt thừa số chung n lũy thừa cao nhất trong cả tử số và mẫu số, sau đó đơn giản thừa số chung đó rồi áp dụng các tính chất và các giới hạn cơ bản để tính.

b) Khi trong giới hạn có căn thức ta có thể nhân chia cho biểu thức liên hợp.

GIỚI HẠN CỦA HÀM SỐ

1. $\lim\limits_{x\to a}\left(u\pm v\right)=\lim\limits_{x\to a}u\pm\lim\limits_{x\to a}v$

2. $\lim\limits_{x\to a}\left(u.v\right)=\lim\limits_{x\to a}u.\lim\limits_{x\to a}v$

3. $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{u}{v}\right)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}u}{\lim\limits_{x\to a}v}\left(\lim\limits_{x\to a}v\neq 0\right)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{u}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a}u}\left(\lim\limits_{x\to a}u\geq 0\right)$

5. $\begin{cases} g(x)\leq f(x)\leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=\lim\limits_{x\to a}h(x)=L \end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$

6. $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right|=+\infty\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\dfrac{1}{f(x)}=0$

7. Qui tắc tính giới hạn:

$\begin{cases} \lim\limits_{x\to a}f(x)=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to a}g(x)=L \end{cases}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\left[f(x).g(x)\right]=(\pm)\infty$ (tùy theo dấu của $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ và L.

8. Hàm số liên tục:

Hàm số $y=f(x)$ liên tục tại a $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$

9. Hàm số $y=f(x)$ liên tục trong $(a;b)$ và $f(a).f(b)<0$ thì phương trình $f(x)=0$ có nghiệm trong $(a;b)$.

10. Giới hạn một bên:

a) $\lim\limits_{x\to a^{+}}f(x)\Leftrightarrow x>a;$ $\qquad\lim\limits_{x\to a^{-}}f(x)\Leftrightarrow x<a$

b) Giới hạn vô cực:

$\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ khi $f(a)\neq 0, g(a)=0$. Phân tích $\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{f(x)}{(x-a).g_1(x)}$.

Tính $M=\dfrac{f(a)}{g(a)}$. Ta có: $\lim\limits_{x\to a^{\pm}}\dfrac{f(x)}{g(x)}=M.(\pm\infty)$

11. Một số dạng vô định:

a) Dạng vô định $\dfrac{0}{0}$

Phương pháp: Tìm $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ mà $f(a)=g(a)=0$

Phân tích tử số và mẫu số thành các thừa số trong đó có chứa $(x-a)$ sau đó đơn giản tử và mẫu cho $(x-a)$.

Chú ý:

* Phương trình $ax^2+bx+c=0$ có nghiệm x_0 thì

$$ax^2+bx+c=\left(x-x_0\right)\left(ax-\frac{c}{x_0}\right)$$

* Cũng có thể thực hiện phép chia đa thức cho $(x-x_0)$

* Khi trong giới hạn có căn thức ta có thể nhân chia cho biểu thức liên hợp.

b) Dạng vô định $\dfrac{\infty}{\infty}$

Phương pháp: Áp dụng các công thức

* $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\alpha}=+\infty\left(\alpha\in\mathbb{N}^*\right)$ * $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{1}{x^{\alpha}}=0$

* $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n=\begin{cases}+\infty \text{ nếu } n \text{ chẵn}\\ -\infty \text{ nếu } n \text{ lẻ}\end{cases}$

* Nếu tính giới hạn dạng hữu tỷ ta đặt nhân tử x lũy thừa cao nhất ở cả tử số và mẫu số, đơn giản và áp dụng các công thức trên.

Chú ý:

Nếu $a>0$ thì $\sqrt{ax^2+bx+c}=\begin{cases}x.\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}} \text{ khi } x\to+\infty\\ -x.\sqrt{a+\dfrac{b}{x}+\dfrac{c}{x^2}} \text{ khi } x\to-\infty\end{cases}$

c) Dạng vô định $\infty-\infty$ và $0.\infty$

Phương pháp: Thực hiện phép biến đổi đưa về dạng $\dfrac{0}{0}$ hoặc $\dfrac{\infty}{\infty}$

HÀM SỐ LIÊN TỤC

1. Xét tính liên tục của hàm số $y = f(x)$ tại x_0

* Tính $f(x_0)$ (nếu $f(x_0)$ không tồn tại thì hàm số không liên tục)

* Tìm $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, khi cần có thể tính giới hạn 1 bên.

* So sánh $f(x_0)$ và $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ để kết luận.

2. Tìm m để hàm số $y = f(x)$ liên tục tại điểm đã chỉ ra

Phương pháp:

* Tính $f(a)$ và tìm $\lim\limits_{x \to a} f(x)$

* Hàm số liên tục tại $x = a \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. Từ điều kiện này tìm m, khi cần có thể tìm giới hạn 1 bên.

3. Chứng minh phương trình có nghiệm:

Phương pháp:

* Đặt $f(x)$ là vế trái của phương trình, $f(x)$ liên tục trong D.

* Tìm hai số a, b $\in$ D sao cho $f(a).f(b) < 0$ thì phương trình có nghiệm $x \in (a;b)$

ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ

1. Bảng các đạo hàm:

Hàm số $y = f(x)$	**Hàm số hợp** $y = f(u), u = g(x)$
$(C)' = 0$ C: hằng số	$y'_x = y'_u.u'_x$
$(x)' = 1$	
$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left(\sqrt{u}\right)' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$	$\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$
$\left(x^\alpha\right)' = \alpha.x^{\alpha-1}$	$\left(u^\alpha\right)' = \alpha.u^{\alpha-1}.u'$

Hàm số $y=f(x)$	Hàm số hợp $y=f(u), u=g(x)$
$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = u'.\cos u$
$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -u'.\sin u$
$\left(\tan x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$\left(\tan u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$
$\left(\cot x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(\cot u\right)' = \dfrac{-u'}{\sin^2 u}$

2. Các qui tắc tính đạo hàm:

Cho các hàm số u, v, w lần lượt có đạo hàm u', v', w'. Ta có:

a) $\left(u+v-w\right)' = u' + v' - w'$

b) $\left(u.v\right)' = u'v + uv'$ Hệ quả: $\left(C.u\right)' = C.u'$ (C: hằng số)

c) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

d) $u = u(x)$ có đạo hàm theo x là u'_x, $y = f(u)$ có đạo hàm theo u là y'_u thì hàm số $y = f[u(x)]$ có đạo hàm theo x là $y'_x = y'_u.u'_x$

3. Đạo hàm cấp cao:

* Đạo hàm của y' gọi là đạo hàm cấp 2, kí hiệu y''

* Đạo hàm của y'' gọi là đạo hàm cấp 3, kí hiệu y'''

* Đạo hàm của đạo hàm cấp $\left(n-1\right)$ gọi là đạo hàm cấp n, kí hiệu $y^{(n)}$

4. Ý nghĩa hình học của đạo hàm:

- Đạo hàm của hàm số $y = f\left(x\right)$ tại điểm x_0 là hệ số góc của tiếp tuyến của đồ thị hàm số đó tại điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$.

- Nếu hàm số $y = f\left(x\right)$ có đạo hàm tại điểm x_0 thì tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $M_0\left(x_0; y_0\right)$ có phương trình là:

$$y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$$

TIẾP TUYẾN CỦA ĐƯỜNG CONG

Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị (C) của hàm số $y = f\left(x\right)$:

Có 7 dạng sau:

Dạng 1: Tiếp tuyến tại điểm $M\left(x_0; y_0\right) \in \left(C\right)$ *(với $y_0 = f\left(x_0\right)$)*

Phương trình tiếp tuyến có dạng: $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Dạng 2: Tiếp tuyến tại điểm có hoành độ $x = x_0$ ***thuộc (C)***

- Tìm $y_0 = f\left(x_0\right)$ và $f'\left(x_0\right)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Chú ý: *Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và trục tung thì* $x_0 = 0$

Dạng 3: Tiếp tuyến tại điểm có tung độ $y = y_0$ ***thuộc (C)***

- Giải phương trình $f\left(x\right) = y_0$ tìm $x = x_0$
- Tìm $f'\left(x_0\right)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Chú ý: *Nếu bài toán yêu cầu viết phương trình tiếp tuyến tại giao điểm của (C) và trục hoành thì* $y_0 = 0$

Dạng 4: Tiếp tuyến có hệ số góc k cho trước

- Tính $y' = f'\left(x\right)$. Giải phương trình $f'\left(x\right) = k$ tìm nghiệm $x = x_0$
- Tính $y_0 = f\left(x_0\right)$
- Viết phương trình tiếp tuyến dạng: $y - y_0 = f'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right)$

Dạng 5: Tiếp tuyến song song với đường thẳng d: $y = ax + b$

- Do tiếp tuyến song song với đường thẳng d nên hệ số góc k của tiếp tuyến bằng a (tức là $k_{tt} = a$, viết như dạng 4)

Dạng 6: Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d: $y = ax + b$

- Do tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng d nên $k_{tt}.a = -1 \Leftrightarrow k_{tt} = -\dfrac{1}{a}$

  (viết như dạng 4)

Dạng 7: Tiếp tuyến tạo với đường thẳng d: $y = ax + b$ ***một góc*** $\varphi,\ 0 < \varphi \le 90$

- Gọi α, β lần lượt là góc hợp bởi tiếp tuyến (d), đường thẳng (Δ) với chiều dương trục hoành. Gọi k là hệ số góc của tiếp tuyến, khi đó ta có: $\varphi = |\alpha - \beta|$ suy ra:

$$\tan\varphi = \tan|\alpha - \beta| = |\tan(\alpha - \beta)| = \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right| = \left|\frac{k-a}{1+ak}\right| (1)$$

- Giải phương trình (1) tìm được hệ số góc k của tiếp tuyến (như dạng 4)