

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG

CHUYÊN ĐỀ

ĐẠO HÀM

CÓ ĐÁP ÁN VÀ LỜI GIẢI CHI TIẾT

ĐẠI SỐ VÀ GIẢI TÍCH 11

NEW

ÔN THI THPT QUỐC GIA NĂM HỌC 2017 - 2018

ĐỊNH NGHĨA ĐẠO HÀM.**A – LÝ THUYẾT TÓM TẮT****1. Định nghĩa đạo hàm tại một điểm**

- Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên khoảng $(a; b)$ và $x_0 \in (a; b)$:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (\Delta x = x - x_0, \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))$$

- Nếu hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì nó liên tục tại điểm đó.

2. Đạo hàm bên trái, bên phải

$$f'(x_0^+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad f'(x_0^-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Hệ quả: Hàm $f(x)$ có đạo hàm tại $x_0 \Leftrightarrow \exists f'(x_0^+)$ và $f'(x_0^-)$ đồng thời $f'(x_0^+) = f'(x_0^-)$.

3. Đạo hàm trên khoảng, trên đoạn

- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $(a; b)$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$
- Hàm số $f(x)$ có đạo hàm (hay hàm khả vi) trên $[a; b]$ nếu nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc $(a; b)$ đồng thời tồn tại đạo hàm trái $f'(b^-)$ và đạo hàm phải $f'(a^+)$.

4. Mối liên hệ giữa đạo hàm và tính liên tục

- Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại x_0 thì $f(x)$ liên tục tại x_0 .

Chú ý: Định lí trên chỉ là điều kiện cần, tức là một hàm có thể liên tục tại điểm x_0 nhưng hàm đó không có đạo hàm tại x_0 .

B – BÀI TẬP

Câu 1. Giới hạn (nếu tồn tại) nào sau đây dùng để định nghĩa đạo hàm của hàm số $y = f(x)$ tại $x_0 < 1$?

A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

B. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

C. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$.

Hướng dẫn giải:

Theo định nghĩa đạo hàm của hàm số tại một điểm thì biểu thức ở đáp án C đúng.

Chọn C.

Câu 2. Cho hàm số $f(x)$ liên tục tại x_0 . Đạo hàm của $f(x)$ tại x_0 là

A. $f(x_0)$.

B. $\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

C. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

D. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Định nghĩa $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ hay $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ (nếu tồn tại giới hạn).

Câu 3. Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại x_0 là $f'(x_0)$. Khẳng định nào sau đây sai?

A. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$.

B. $f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$.

C. $f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

D. $f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x + x_0) - f(x_0)}{x - x_0}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn D

A. Đúng (theo định nghĩa đạo hàm tại một điểm).

B. Đúng vì

$$\Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = \Delta x + x_0$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x + x_0 - x_0} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

C. Đúng vì

Đặt $h = \Delta x = x - x_0 \Rightarrow x = h + x_0$, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h + x_0 - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Câu 4. Số gia của hàm số $f(x) = x^3$ ứng với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ bằng bao nhiêu?

A. -19.

B. 7.

C. 19.

D. -7.

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

Ta có $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - 2^3 = x_0^3 + (\Delta x)^3 + 3x_0\Delta x(x_0 + \Delta x) - 8$.

Với $x_0 = 2$ và $\Delta x = 1$ thì $\Delta y = 19$.

Câu 5. Tỉ số $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ của hàm số $f(x) = 2x(x-1)$ theo x và Δx là

A. $4x + 2\Delta x + 2$.

B. $4x + 2(\Delta x)^2 - 2$.

C. $4x + 2\Delta x - 2$.

D. $4x\Delta x + 2(\Delta x)^2 - 2\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn C

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{2x(x-1) - 2x_0(x_0-1)}{x - x_0}$$

$$= \frac{2(x-x_0)(x+x_0) - 2(x-x_0)}{x-x_0} = 2x + 2x_0 - 2 = 4x + 2\Delta x - 2$$

Câu 6. Số gia của hàm số $f(x) = \frac{x^2}{2}$ ứng với số gia Δx của đối số x tại $x_0 = -1$ là

A. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$.

B. $\frac{1}{2}[(\Delta x)^2 - \Delta x]$.

C. $\frac{1}{2}[(\Delta x)^2 + \Delta x]$.

D. $\frac{1}{2}(\Delta x)^2 + \Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Với số gia Δx của đối số x tại $x_0 = -1$ Ta có

$$\Delta y = \frac{(-1 + \Delta x)^2}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1 + (\Delta x)^2 - 2\Delta x}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(\Delta x)^2 - \Delta x$$

Câu 7. Cho hàm số $f(x) = x^2 - x$, đạo hàm của hàm số ứng với số gia Δx của đối số x tại x_0 là

- A. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x - \Delta x)$.
 B. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x - 1)$.
 C. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x + 1)$.
 D. $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} ((\Delta x)^2 + 2x\Delta x + \Delta x)$.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có :

$$\begin{aligned} \Delta y &= (x_0 + \Delta x)^2 - (x_0 + \Delta x) - (x_0^2 - x_0) \\ &= x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 - x_0 - \Delta x - x_0^2 + x_0 \\ &= (\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x \end{aligned}$$

$$\text{Nên } f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 + 2x_0\Delta x - \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x_0 - 1)$$

$$\text{Vậy } f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta x + 2x - 1)$$

Câu 8. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{khi } x > 0 \\ x & \text{khi } x = 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Xét hai mệnh đề sau:

(I) $f'(0) = 1$.

(II) Hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 0$.

Mệnh đề nào đúng?

- A. Chỉ (I).
 B. Chỉ (II).
 C. Cả hai đều sai.
 D. Cả hai đều đúng.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Gọi Δx là số gia của đối số tại 0 sao cho $\Delta x > 0$.

$$\text{Ta có } f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x + 0) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x \sqrt{\Delta x}} = +\infty.$$

Nên hàm số không có đạo hàm tại 0.

Câu 9. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{x - 1} & \text{khi } x \neq 1 \\ 0 & \text{khi } x = 1 \end{cases}$ tại điểm $x_0 = 1$.

- A. $\frac{1}{3}$
 B. $\frac{1}{5}$
 C. $\frac{1}{2}$
 D. $\frac{1}{4}$

Hướng dẫn giải:

Chọn C.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{\sqrt{x^3 - 2x^2 + x + 1} + 1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{Vậy } f'(1) = \frac{1}{2}.$$

Câu 10. $f(x) = \begin{cases} 2x+3 & \text{khi } x \geq 1 \\ \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ tại $x_0 = 1$.

A. 0

B. 4

C. 5

D. Đáp án khác

Hướng dẫn giải:**Chọn D.**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (2x+3) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3+2x^2-7x+4}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2+3x-4) = 0$

Dẫn tới $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) \Rightarrow$ hàm số không liên tục tại $x = 1$ nên hàm số không có đạo hàm tại $x_0 = 1$.

Câu 11. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} \frac{3-\sqrt{4-x}}{4} & \text{khi } x \neq 0 \\ \frac{1}{4} & \text{khi } x = 0 \end{cases}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. $\frac{1}{4}$.B. $\frac{1}{16}$.C. $\frac{1}{32}$.

D. Không tồn tại.

Hướng dẫn giải:**Chọn B**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3-\sqrt{4-x}}{4} - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-\sqrt{4-x}}{4x}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2-\sqrt{4-x})(2+\sqrt{4-x})}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{4x(2+\sqrt{4-x})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{4(2+\sqrt{4-x})} = \frac{1}{16}$.

Câu 12. Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2}$. Khi đó $f'(0)$ là kết quả nào sau đây?

A. Không tồn tại.

B. 0.

C. 1.

D. 2.

Hướng dẫn giải:**Chọn A.**

Ta có $f(x) = \sqrt{x^2} = |x|$ nên $f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x+0)-f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$.

Do $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1 \neq \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$ nên $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ không tồn tại.

Câu 13. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 2 \\ -\frac{x^2}{2} + bx - 6 & \text{khi } x > 2 \end{cases}$. Để hàm số này có đạo hàm tại $x = 2$ thì giá

trị của b làA. $b = 3$.B. $b = 6$.C. $b = 1$.D. $b = -6$.Hướng dẫn giải:**Chọn B**

Ta có

- $f(2) = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 = 4$
- $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \left(-\frac{x^2}{2} + bx - 6 \right) = 2b - 8$

$f(x)$ có đạo hàm tại $x = 2$ khi và chỉ khi $f(x)$ liên tục tại $x = 2$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow 2b - 8 = 4 \Leftrightarrow b = 6.$$

Câu 14. Số gia của hàm số $f(x) = x^2 - 4x + 1$ ứng với x và Δx là

- A. $\Delta x(\Delta x + 2x - 4)$. B. $2x + \Delta x$. C. $\Delta x(2x - 4\Delta x)$. D. $2x - 4\Delta x$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có

$$\Delta y = f(\Delta x + x) - f(x)$$

$$= (\Delta x + x)^2 - 4(\Delta x + x) + 1 - (x^2 - 4x + 1)$$

$$= \Delta x^2 + 2\Delta x \cdot x + x^2 - 4\Delta x - 4x + 1 - x^2 + 4x - 1 = \Delta x^2 + 2\Delta x \cdot x - 4\Delta x$$

$$= \Delta x(\Delta x + 2x - 4)$$

Câu 15. Xét ba mệnh đề sau:

- (1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó.
- (2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.
- (3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Trong ba câu trên:

- A. Có hai câu đúng và một câu sai. B. Có một câu đúng và hai câu sai.
C. Cả ba đều đúng. D. Cả ba đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

(1) Nếu hàm số $f(x)$ có đạo hàm tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ liên tục tại điểm đó. Đây là mệnh đề đúng.

(2) Nếu hàm số $f(x)$ liên tục tại điểm $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Phản ví dụ

Lấy hàm $f(x) = |x|$ ta có $D = \mathbb{R}$ nên hàm số $f(x)$ liên tục trên \mathbb{R} .

$$\text{Nhưng ta có } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - 0}{x - 0} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 0}{x - 0} = -1 \end{cases}$$

Nên hàm số không có đạo hàm tại $x = 0$.

Vậy mệnh đề (2) là mệnh đề sai.

(3) Nếu $f(x)$ gián đoạn tại $x = x_0$ thì chắc chắn $f(x)$ không có đạo hàm tại điểm đó.

Vì (1) là mệnh đề đúng nên ta có $f(x)$ không liên tục tại $x = x_0$ thì $f(x)$ có đạo hàm tại điểm đó.

Vậy (3) là mệnh đề đúng.

Câu 16. Xét hai câu sau:

(1) Hàm số $y = \frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$

(2) Hàm số $y = \frac{|x|}{x+1}$ có đạo hàm tại $x=0$

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (2) đúng.

B. Chỉ có (1) đúng.

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B

Ta có: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x+1} = 0 \\ f(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|}{x+1} = f(0)$. Vậy hàm số $y = \frac{|x|}{x+1}$ liên tục tại $x=0$

Ta có: $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{\frac{|x|}{x+1} - 0}{x} = \frac{|x|}{x(x+1)}$ (với $x \neq 0$)

Do đó: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x|}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{x+1} = -1 \end{cases}$

Vì giới hạn hai bên khác nhau nên không tồn tại giới hạn của $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$ khi $x \rightarrow 0$.

Vậy hàm số $y = \frac{|x|}{x+1}$ không có đạo hàm tại $x=0$

Câu 17. Cho hàm số $f(x) = x^2 + |x|$. Xét hai câu sau:

(1). Hàm số trên có đạo hàm tại $\langle \text{nguyenthuongnd86@gmail.com} \rangle$.

(2). Hàm số trên liên tục tại $x=0$.

Trong hai câu trên:

A. Chỉ có (1) đúng.

B. Chỉ có (2) đúng.

C. Cả hai đều đúng.

D. Cả hai đều sai.

Hướng dẫn giải:

Chọn B.

Ta có

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 + x) = 0.$$

$$+) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 - x) = 0.$$

$$+) f(0) = 0.$$

$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$. Vậy hàm số liên tục tại $x=0$.

Mặt khác:

$$+) f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1.$$

$$+) f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x - 1) = -1.$$

$\Rightarrow f'(0^+) \neq f'(0^-)$. Vậy hàm số không có đạo hàm tại $x=0$.

Câu 18. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{khi } x \geq 1 \\ ax + b & \text{khi } x < 1 \end{cases}$ có đạo hàm tại $x = 1$.

A. $\begin{cases} a = 23 \\ b = -1 \end{cases}$

B. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -11 \end{cases}$

C. $\begin{cases} a = 33 \\ b = -31 \end{cases}$

D. $\begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$

Hướng dẫn giải:

Chọn D

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 + x) = 2$; $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (ax + b) = a + b$

Hàm có đạo hàm tại $x = 1$ thì hàm liên tục tại $x = 1 \Leftrightarrow a + b = 2$ (1)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 + x - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (x + 2) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax + b - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{ax - a}{x - 1} = a \text{ (Do } b = 2 - a)$$

$$\text{Hàm có đạo hàm tại } x = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = -1 \end{cases}$$

Câu 19. Cho hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{khi } x \leq 1 \\ ax + b & \text{khi } x > 1 \end{cases}$. Với giá trị nào sau đây của a, b thì hàm số có đạo

hàm tại $x = 1$?

A. $a = 1; b = -\frac{1}{2}$.

B. $a = \frac{1}{2}; b = \frac{1}{2}$.

C. $a = \frac{1}{2}; b = -\frac{1}{2}$.

D. $a = 1; b = \frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Hàm số liên tục tại $x = 1$ nên Ta có $a + b = \frac{1}{2}$

Hàm số có đạo hàm tại $x = 1$ nên giới hạn 2 bên của $\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$ bằng nhau và Ta có

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{ax + b - (a \cdot 1 + b)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{a(x - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} a = a$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)(x - 1)}{2(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{(x + 1)}{2} = 1$$

Vậy $a = 1; b = -\frac{1}{2}$

Câu 20. $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{khi } x \neq 0 \\ 0 & \text{khi } x = 0 \end{cases}$ tại $x = 0$.

A. 0

B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{2}{3}$

D. 7

Hướng dẫn giải:

Chọn A

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

Vậy $f'(0) = 0$.

Câu 21. $f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x}{x} & \text{khi } x > 0 \\ x + x^2 & \text{khi } x \leq 0 \end{cases}$ tại $x_0 = 0$

A. 1

B. 2

C. 3

D. 5

Hướng dẫn giải:**Chọn A**

Ta có $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \sin x \right) = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x + x^2) = 0$ nên hàm số liên tục tại $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1$ và

$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x + x^2}{x} = 1$

Vậy $f'(0) = 1$.

Câu 22. $f(x) = \frac{x^2 + |x+1|}{x}$ tại $x_0 = -1$.

A. 2

B. 0

C. 3

D. đáp án khác

Hướng dẫn giải:**Chọn D**

Ta có hàm số liên tục tại $x_0 = -1$ và

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{x^2 + x + |x + 1|}{x(x + 1)}$$

Nên $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x + 1)} = 0$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^2 - 1}{x(x + 1)} = 2$

Do đó $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} \neq \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1}$

Vậy hàm số không có đạo hàm tại điểm $x_0 = -1$.

Nhận xét: Hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm tại $x = x_0$ thì phải liên tục tại điểm đó.

Câu 23. Tìm a, b để hàm số $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{khi } x \geq 0 \\ 2x^2 + ax + b & \text{khi } x < 0 \end{cases}$ có đạo hàm trên \mathbb{R} .

A. $a = 10, b = 11$ B. $a = 0, b = -1$ C. $a = 0, b = 1$ D. $a = 20, b = 1$ **Hướng dẫn giải:****Chọn C**

Ta thấy với $x \neq 0$ thì $f(x)$ luôn có đạo hàm. Do đó hàm số có đạo hàm trên \mathbb{R} khi và chỉ khi hàm có đạo hàm tại $x = 0$.

Ta có: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = b \Rightarrow f(x)$ liên tục tại $x = 0 \Leftrightarrow b = 1$.

Khi đó: $f'(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0$; $f'(0^-) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = a$

$\Rightarrow f'(0^+) = f'(0^-) \Leftrightarrow a = 0$.

Vậy $a = 0, b = 1$ là những giá trị cần tìm.

ĐẶNG VIỆT ĐÔNG